§ 4 Zufallsgrößen

1. Begriff

Definition:
Eine Funktion X, die jedem Ergebnis ω eines Ergebnisraums Ω eine reelle Zahl $X(\omega)$ zuordnet, heißt Zufallsgröße oder Zufallsvariable X auf Ω.
$X: \omega \mapsto X(\omega)$; (Definitionsmenge von X: $D_X = \Omega$)

Beispiele:

① Jemand setzt beim Roulette auf 1. Dutzend 1 Geldeinheit. Die Zufallsgröße X gebe den Reingewinn an.

$\Omega = \{0;1;2;...;36\}$

$$X(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{für } \omega \in \{1;2;3;...;12\} \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

② Folgendes Spiel beim Würfeln werde vereinbart: Einsatz: 1€. Fällt eine 6, erhält man 3€, fällt eine 4 oder 5, erhält man seinen Einsatz zurück, sonst verfällt er. Die Zufallsgröße X beschreibe den Reingewinn.

$\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

$$X(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{für } \omega = 6 \\ 0 & \text{für } \omega \in \{4;\ 5\} \\ -1 & \text{für } \omega \in \{1;\ 2;\ 3\} \end{cases}$$

Angabe in Form einer „Wertetabelle der Zufallsgröße":

ω	1	2	3	4	5	6
$X(\omega)$	–1	–1	–1	0	0	2

2. Wahrscheinlichkeitsverteilung

Definition:
Eine Funktion P_X, die jedem Wert x_i, den eine Zufallsgröße annehmen kann, die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ zuordnet, heißt *Wahrscheinlichkeitsverteilung* der Zufallsgröße X auf Ω.
$P_X: x_i \mapsto P(X = x_i)$

Beispiele:

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X von Beispiel ② von oben.

x_i	–1	0	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Anmerkung: Axiome v. Kolmogorow erfüllt, die Summe der Wahrscheinlichkeiten ergibt 1.

b) Ein Würfel wird dreimal hintereinander geworfen. Die Zufallsgröße Z beschreibt die Anzahl der geworfenen 6er.

Bestimme $P(Z = 0)$; $P(Z = 1)$; $P(Z = 2)$; $P(Z \le 1)$; $P(Z \le 2)$; $P(Z > 2)$ $P(Z \le 1{,}5)$ und beschreibe gib die zugehörigen Ereignisse in Wortform an.

$$P(Z = 0) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$ „Keine 6 fällt"

$$P(Z = 1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 3 = \frac{75}{216}$$ „Genau eine 6 fällt"

$$P(Z = 2) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 3 = \frac{15}{216}$$ „Genau zwei 6er fallen"

$$P(Z \le 1) = P(Z = 0) + P(Z = 1) = \frac{125}{216} + \frac{75}{216} = \frac{200}{216}$$ „Höchstens eine 6 fällt"

$$P(Z \le 2) = P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2) = \frac{215}{216}$$ „Höchstens zwei 6er fallen"

$$P(Z > 2) = P(Z = 3) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - \frac{215}{216} = \frac{1}{216}$$ „Mehr als zwei 6er fallen"

$$P(Z \le 1{,}5) = P(Z \le 1) = \frac{125}{216} + \frac{75}{216} = \frac{200}{216}$$ „Höchstens eine 6 fällt"

3. Verteilungsfunktion

Definition

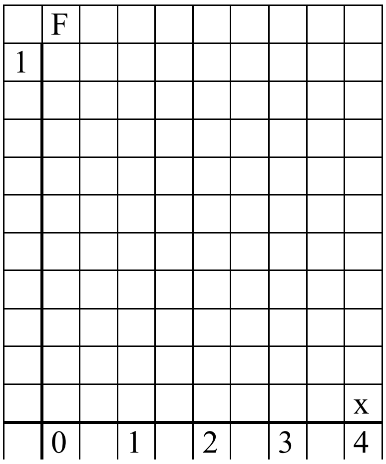
X sei eine Zufallsvariable mit der Wertemenge $\{x_1; x_2;\ldots x_k\}$. Dann heißt die für alle $x \in IR$ definierte Funktion F_X mit

$$F_X : x \mapsto P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$$

die *kummulative Verteilungsfuntion* der Zufallsgröße X auf Ω.

Beispiel b) von oben

$x \in$	$]-\infty; 0[$	$[0; 1[$	$[1; 2[$	$[2; 3[$	$[3; \infty[$
F(x)	0	$\frac{125}{216} \approx 57{,}8\%$	$\frac{200}{216} \approx 92{,}6\%$	$\frac{215}{216} \approx 99{,}5\%$	1



Eigenschaften von F:

- F ist monoton zunehmend
- F ist eine rechtsseitig stetige Treppenfunktion mit Sprungstellen $x_1; x_2;\ldots; x_k$ und den Sprunghöhen $P(X = x_1); P(X = x_2)\ldots P(X = x_k)$

- $P(X > a) = 1 - P(X \le a) = 1 - F(a)$
- $P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)$
- $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

4. Erwartungswert

Definition

Sei X eine Zufallsgröße, die die Werte $x_1, x_2, \ldots x_n$ annimmt. Der Wert

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

heißt *Erwartungswert der Zufallsgröße X*. (Manchmal wird er auch mit μ bezeichnet.)

Beispiele:

a)

x_i	1	2	5
$P(X = x_i)$	0,2	0,5	0,3

E(X) = ____

b) *Roulette*: X beschreibe den Reingewinn beim Setzen auf „rouge“

x_i	–1	1
$P(X = x_i)$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

E(X) = __________________________________

Merke:

Ist bei einem Spiel der Erwartungswert E(X) = 0, so heißt das Spiel *faires Spiel*.

Roulette ist also kein faires Spiel.

c) *Drothlers Würfelspiel*: Wirft der Schüler eine Primzahl, so erhält er 1 €, wirft er eine 1, so erhält er 8 €. Einsatz: 2 €. X beschreibt Reingewinn:

x_i	-2	-1	6
$P(X = x_i)$			

E(X) = ____________________________________ (____________ Spiel)

5. Varianz und Standardabweichung

Folgende Verteilungen X und Y sind gegeben:

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0	0,1	0,8	0,1	0
$P(Y = y)$	0,4	0,1	0	0,1	0,4
$(x-\mu_X)$					
$(x-\mu_X)^2$					
x^2					
$(y-\mu_Y)$					
$(y-\mu_Y)^2$					
y^2					

$\mu_X = E(X) =$ ________________

$\mu_Y = E(Y) =$ ________________

X und Y besitzen denselben Erwartungswert, Y ist jedoch weiter gestreut als X.

<u>Maßzahl für die Streuung:</u>

$E((X-E(X))^2) = 0{,}2$ Werte liegen mehr am Erwartungswert

$E((Y-E(Y))^2) = 3{,}4$ Werte liegen weiter weg vom Erwartungswert

<u>Andere Berechnungsmöglichkeit:</u>

$E(X^2) = 0{,}4 + 7{,}2 + 1{,}6 = 9{,}2$ $E(X^2)-[E(X)]^2 = 0{,}2$

$E(Y^2) = 0{,}4 + 0{,}4 + 1{,}6 + 10 = 12{,}4$ $E(Y^2)-[E(Y)]^2 = 3{,}4$

<u>Definition</u>

Sei X eine Zufallsgröße auf Ω mit Erwartungswert E(X). Die Zahl

$Var(X) = E([X-E(X)]^2)$

heißt *Varianz von X* und die Zahl

$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

heißt *Standardabweichung* oder *Streuung von X*.

<u>Regeln:</u>

1. $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ (Verschiebungsformel)
2. $Var(a \cdot X) = a^2 Var(X)$
3. $Var(X + b) = Var(X)$

<u>Beweis</u>

$\mu = E(X) = \text{const}$

1. $E(X-E(X))^2 = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2\mu \cdot X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2) = E(X^2)-[E(X)]^2$
2. $Var\,(aX) = E(a^2X^2) - E(aX)^2 = a^2E(X^2) - [aE(X)]^2 = a^2E(X^2) - a^2[E(X)]^2 = a^2 Var(X)$
3. $Var\,(X+b) = E([X+b-E(X+b)]^2) = E([X + b - b - E(X)]^2) = E([X-E(X)]^2) = Var(X)$