# §05. Kombinatorik

Um die Anzahl der Möglichkeiten zu bestimmen, Elemente anzuordnen, bedient man sich der Kombinatorik.

Dieselben Rechnungen führt man auch über das Urnenmodell durch. Hier befinden sich in einer Urne n (hier: n = 5) mit unterschiedlichen Zahlen nummerierte Kugeln, die einzeln gezogen werden, wobei man sich hier einerseits für die Reihenfolge interessieren kann (oder auch nicht), andererseits für die Art der Ziehung (mit Zurücklegen oder ohne).

## 1. Zahlenschlossproblem

| Kombinatorisches Problem: | Urnenmodell: |
|---|---|
| Auf jeden von n Plätzen wird jeweils eines von $k_1$, $k_2$, …, $k_n$ *unterscheidbaren* Elementen gelegt. | Ziehen *mit* Zurücklegen<br>*mit* Beachtung der Reihenfolge |

3 Mögliche Ergebnisse aus der Ergebnismenge Ω:
(1;2;2;3) (1;3;2;2) (3;4;5;1) „*k-Tupel einer n-Menge*“ *Hier: 4-Tupel einer 5-Menge*

Berechnung der Anzahl der Möglichkeiten:
Allgemein: $\boxed{|\Omega| = k_1\, k_2 \ldots k_n}$ (Produktregel)
Sonderfall: Bei jeweils gleicher Anzahl $k = k_1 = k_2 \ldots = k_n$: $\boxed{|\Omega| = k^n}$

Beispiele:
① Wie viele Möglichkeiten gibt es ein Zahlenschloss mit 4 Ringen, von denen jeder die Ziffern 0 bis 9 trägt, einzustellen?

|Ω| = ____________________

② Auf einer Speisekarte stehen 5 verschiedene Vorspeisen, 10 Hauptgerichte und 3 Nachspeisen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein Menü aus je einer Vor-, Haupt- und Nachspeise zusammenzustellen?

|Ω| = ____________________

## 2. Klassenfotoproblem

| Kombinatorisches Problem: | Urnenmodell: |
|---|---|
| Anzahl der Möglichkeiten, auf n Plätze n *unterscheidbare* Elemente zu verteilen. | Ziehen *ohne* Zurücklegen<br>*mit* Beachtung der Reihenfolge |

3 Mögliche Ergebnisse aus der Ergebnismenge Ω:
(1;2;3;4;5) (1;3;2;4;5) (1;3;5;4; 2) „*Permutationen aus einer n-Menge*“

Berechnung der Anzahl der Möglichkeiten:

$\boxed{|\Omega| = n\cdot(n-1)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1}$

Abkürzung: $\boxed{n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$ „n-Fakultät“

Außerdem ist festgelegt: $\boxed{0! = 1}$ und $\boxed{1! = 1}$

Beispiel:
24 Schüler eines Mathekurses wollen ein Kursfoto machen, auf dem sie alle in einer Reihe nebeneinander stehen. Wie viele Möglichkeiten für die Aufstellung gibt es?

|Ω| = ____________________

 

## 3. Wettlaufproblem

| Kombinatorisches Problem: | Urnenmodell: |
|---|---|
| Anzahl der Möglichkeiten, auf n Plätze k (k < n) *unterscheidbare* Elemente zu verteilen. | Ziehen *ohne* Zurücklegen<br>*mit* Beachtung der Reihenfolge |
| Element: P1 P3 ___ P2 ___<br>Platz: 1 2 3 4 5 | Ziehung: 1. 2. 3.<br>Kugel-Nr.: ① ④ ② |

Mögliches Ergebnis aus der Ergebnismenge Ω:
(1;4;2) „*k-Permutationen aus einer n-Menge*“ *Hier: 3-Permutationen aus einer 5-Menge*

Berechnung der Anzahl der Möglichkeiten:

$$\boxed{|\Omega| = n\cdot(n-1)\cdot \ldots \cdot(n-k+1)}$$ bzw. $$|\Omega| = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\quad\cdot(n-k)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$|\Omega| = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Taschenrechner: n $\boxed{\text{nPr}}$ k

Beispiel:
20 Schüler eines Mathekurses laufen um die Wette. Wie viele Möglichkeiten für die Verteilung der 3 unterschiedlichen Siegerpokale gibt es?

|Ω| = ____________________

## 4. Lottoproblem

| Kombinatorisches Problem: | Urnenmodell: |
|---|---|
| Anzahl der Möglichkeiten, auf n Plätze k (k ≤ n) *nicht unterscheidbare* Elemente zu verteilen. | Ziehen *ohne* Zurücklegen<br>*ohne* Beachtung der Reihenfolge |
| Element: X ___ X X ___<br>Platz: 1 2 3 4 5 | Gezogene Kugeln in numerischer Reihenfolge: ① ③ ④ |

Mögliches Ergebnis aus der Ergebnismenge Ω:
{1;3;4} „*k-Teilmengen aus einer n-Menge*“ *Hier: 3-Teilmengen aus einer 5-Menge*

Berechnung der Anzahl der Möglichkeiten:
(k! Möglichkeiten des Wettlaufproblems schrumpfen zu einer einzigen zusammen)

$$|\Omega| = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Abkürzung: $$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

*Binomialkoeffizient* „k aus n“ bzw. „n über k“

Taschenrechner: n $\boxed{\text{nCr}}$ k

z.B. $\binom{49}{6} = 13983816$ „ 6 aus 49“ $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{n} = 1$

Beispiel:
Beim Zahlenlotto werden 6 Kreuze auf 49 Felder verteilt.
Wie viele Möglichkeiten gibt es? |Ω| = ____________________

## 5. Weitere Beispiele und Strategien

„Reserviertschilder“-Strategie

In einem Schulaufgabenraum befinden sich 24 Plätze. 6 davon sind in der ersten Reihe.
Ein Mathekurs mit 20 Schülern soll in diesem Raum Schulaufgabe schreiben, wobei die Schülerinnen Monika, Mona, Anna, Mia und Petra in der ersten Reihe sitzen müssen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es?

① Aufstellen von jeweils nicht-unterscheidbaren Reserviertschildern für die Gruppen:
Es gibt 5 Reserviertschilder, die auf den 6 Plätzen der ersten Reihe ausgeteilt werden, und 15 weitere Schilder für die restlichen 15 Schüler, die auf die übrigen 19 Plätze verteilt werden:

$$\binom{6}{5} \cdot \binom{19}{15}$$

② Die entsprechenden Personen (allg.: die unterscheidbaren Elemente) verteilen:
5 Schülerinnen werden auf die fünf reservierten Plätze verteilt, die restlichen verteilen sich auf die anderen 15 reservierten Plätze.

Also: $|\Omega| = \binom{6}{5} \cdot \binom{19}{15} \cdot 5! \cdot 15! = 4{,}7 \cdot 10^{15}$

Wahrscheinlichkeiten beim Ziehen mit Zurücklegen

Ein Würfel wird 5mal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

a) A: „Genau zwei 6er fallen“
Festlegen der Plätze, an denen die 6er fallen: (z.B. die ersten beiden)

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$$

Multiplizieren mit der Anzahl der Möglichkeiten, die es durch die Variierung auf den Plätzen gibt:
Die 2 nichtunterscheidbaren 6er können auf 5 Plätzen variieren:

Damit: $P(A) = \binom{5}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 16{,}1\%$

b) B: „Zwei der ersten drei Würfe sind eine 6, aber kein weiter mehr “

___________________________________

Wahrscheinlichkeiten beim Ziehen ohne Zurücklegen

a) Aus einer Urne mit 4 schwarzen und 3 weißen Kugeln werden 3 Kugeln auf einmal gezogen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 schwarze Kugeln gezogen werden.

P(              ) =

b) Aus einer Urne mit 8 Kugeln, die mit je einem der Buchstaben A B C D E F G H versehen sind, werden nacheinander 3 Kugeln gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dabei das Wort HGF in dieser Reihenfolge gezogen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man aus den gezogenen Kugeln das Wort HGF bilden?

$P(B_1) =$                                        $P(B_2) =$