§ 6. Die Binomialverteilung

1. Bernoullikette

Definition:
Eine Menge von Ereignissen A_1, A_2,...A_n heißt *Bernoullikette der Länge n*, wenn
1. die Ereignisse A_1, A_2,...A_n unabhängig sind und
2. alle Ereignisse A_i die gleiche Wahrscheinlichkeit haben:

$$P(A_1) = P(A_2) =... = P(A_n) = p$$

p heißt *Parameter der Bernoullikette*.

Bemerkung: Bei einer Bernoullikette gibt es nur 2 Ausgänge: *Treffer* (mit Wahrscheinlichkeit p) oder *Niete* (mit Wahrscheinlichkeit q = 1– p).

Beispiele:

① *n-maliger Würfelwurf:*
A_i : „Keine 6 beim i-ten Wurf" p =5/6

② *Stichprobe mit Zurücklegen* (Typisches Modell für Bernoulli-Kette)
A_i: „Das i-te entnommene Stück ist Ausschuss" p: Ausschusswahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit:
Ist die Nummer der Züge mit Treffer vorgegeben (z.B. „Nur beim 1., 3. und 5 Versuch ein Treffer"), so ist die Wahrscheinlichkeit, bei n Versuchen genau k Treffer zu erzielen:

$$P(X = k) = p^k(1-p)^{n-k}$$

Ist die Nummer der Züge mit Treffer nicht vorgegeben (z.B. „Bei genau 3 Versuchen ein Treffer") , so ist die Wahrscheinlichkeit, bei n Versuchen genau k Treffer zu erzielen:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Beispiele:

① Berechne die Wahrscheinlichkeit, beim fünfmaligen Würfeln
a) nur beim 1. und 3. Wurf eine 6 zu haben:

n = ___ ; k = ___; p = P(X = 2) = ______________________________

nur beim 1. und 3. Wurf eine gerade Zahl zu haben.

n = ___; k = ___; p = P(X = 2) = ______________________________

b) bei genau 2 Würfen eine 6 zu haben.

____

② Bei der Produktion der Bierkrüge für das Annafest ist der Ausschussanteil 5%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit unter 10 Krügen genau 2mal Ausschuss vorzufinden?

____

(Beachte: Bei großer Anzahl N (hier von produzierten Krügenverwendet man das Modell „mit Zurücklegen")

2. Binomialverteilung

<u>Definition:</u>
Jede Wahrscheinlichkeitsverteilung

B(n;p): k → B(n;p;k) = $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ k = 0;1;2;...n

heißt *Binomialverteilung*.

<u>Beispiele:</u>
Aus einer Urne mit 3 weißen und 7 schwarzen Kugeln werden 10 Kugeln mit Zurücklegen entnommen. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:

1. Genau 3 weiße Kugeln werden gezogen: ____________________

   ____
2. keine weiße Kugel wird gezogen:

   ____
3. Höchstens 1 weiße Kugeln wird gezogen:

   ____
4. Höchstens 9 weiße Kugeln werden gezogen:

   ____
5. Mindestens 3 aber höchstens 7 weiße Kugeln werden gezogen:

   ____

   ____

3. Drei-Mindestens-Aufgabe:

Wie oft muss man einen Laplace-Würfel *mindestens* werfen, damit mit *mindestens* 98% Wahrscheinlichkeit *mindestens* eine 6 fällt?

Antwort:

4. Hinweise zum Umgang mit dem Tafelwerk

P(X = k) „genau k Treffer“

Verwende die Spalten „B(n;p;k)“ und suche erst p, dann n und k heraus.

Schreibe: ____

Beispiel

10mal Würfeln: Wahrscheinlichkeit, genau 4 gerade Augenzahlen

________________________ ____

P(X ≤ k) „höchstens k Treffer“

Verwende die Spalten „$\sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$“ und erst p, dann n und k heraus.

Schreibe: ______________________________

Beispiel

10mal Würfeln: Wahrscheinlichkeit höchstens 4 gerade Augenzahlen

________________________ ____

Sonstige

Alle anderen Wahrscheinlichkeiten müssen auf P(X ≤ k) zurückgeführt werden:

– „Weniger als 4“: ______________________________

– „Mehr als 5“: ______________________________

– „Mindestens 9“: ______________________________

– „Mindestens 7 aber höchstens 15“: ______________________________

____

–„Mehr als 7 aber höchstens 15“: ______________________________

____

–„Mehr als 7 aber weniger als 15“: ______________________________

____

Achtung: Nicht für alle Wahrscheinlichkeiten kann das Tafelwerk verwendet werden!!!!

5. Erwartungswert und Varianz

<u>Wir wissen:</u> E(X) = $\sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$ heißt Erwartungswert der Zufallsgröße X.

Var(X) = E([X–E(X)]²) heißt Varianz der Zufallsgröße X.

<u>Bernoulli-Kette:</u> Dem j-ten Bernoulli-Experiment wird die Zufallsgröße X_j zugeordnet, die die Werte 1 (Treffer) oder 0 (Niete) annehmen kann.

x_i	0	1
$P(X_j=x_i)$	q	p

Es gilt: Alle X_j sind unabhängig und

$E(X_j) = 0q + 1p = p$

$Var(X_j) = E(X_i - p)^2 = q\,(0 - p)^2 + p\,(1 - p)^2 = (1 - p)\,p^2 + p\,(1 - p)^2 =$

$= (1 - p)(p^2 + p - p^2) = (1 - p)\,p = qp$

Die Zufallsgröße $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ beschreibt dann die Anzahl der Treffer. Mit den Summenformeln

$E(X) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = E(X_j) = np$

$Var(X) = Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n) = nVar\,(X_j) = npq$

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit Parameter p und q = 1 – p gilt:

$E(X) = np$

$Var(X) = npq$

$\sigma = \sqrt{npq}$