§09. Baumdiagramme und bedingte Wahrscheinlichkeit

1. Urnenmodell beim Ziehen mit besonderen Bedingungen

In einer Urne befinden sich N Kugeln, von denen K eine bestimmte Eigenschaft besitzen (z.B. sie sind schwarz). Zieht man nun n Kugeln, so interessiert man sich für die Wahrscheinlichkeit „genau k Kugeln sind schwarz“. Dabei muss man die Art des Ziehens unterscheiden.

Beispiel: 10 Kugeln, von denen 8 schwarz und 2 weiß sind, befinden sich in der Urne.

a) Ziehen mit Zurücklegen (Binomialverteilung)

$$\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{K}{N}\right)^k\cdot\left(1-\frac{K}{N}\right)^{n-1}=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-1}}$$

Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 2 schwarze zu ziehen, wenn 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen werden?

Lösung: $N=10,\ K=8\ \ (\text{d.h. } p=\frac{8}{10}=0{,}8);\ n=3,\ k=2$

$$P(X=2)= \ =\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{8}{10}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{10}\right)^1=38{,}4\%$$

b) Ziehen ohne Zurücklegen

Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 2 schwarze zu ziehen, wenn 3 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen werden?

Lösung: $|\Omega|=\binom{10}{3}$ $\qquad |A|=\binom{8}{2}\binom{2}{1}$ $\qquad$ Also: $P(X=2)=\dfrac{\binom{8}{2}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}}$

Allgemein:

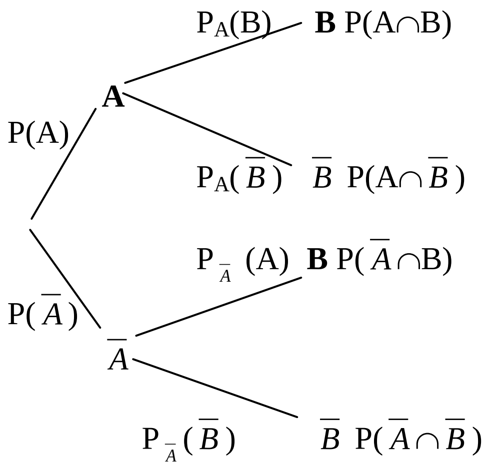
$$\boxed{P(X=k)=\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

c) Ziehen mit besonderen Bedingungen

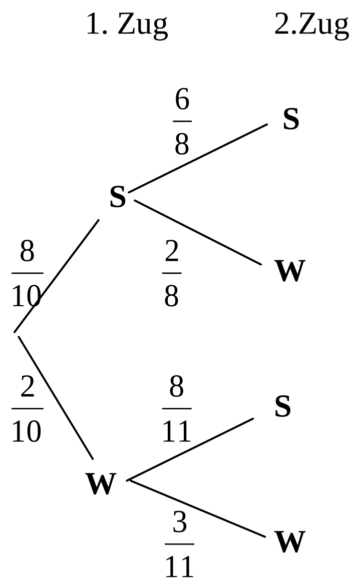
Beispiel: Wird eine schwarze Kugel gezogen, so wird diese und eine zusätzliche schwarze Kugel der Urne entnommen, wird eine weiße Kugel gezogen, so wird diese und eine zusätzliche weiße Kugel in die Urne gelegt. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse beim 2maligen Ziehen.

Lösung mit Baumdiagramm

Allgemein



Lösung für das Beispiel



$\frac{8}{10} \cdot \frac{6}{8} = 60\%$

$\frac{8}{10} \cdot \frac{2}{8} = 20\%$

$\frac{2}{10} \cdot \frac{8}{11} = \frac{8}{55}$

$\frac{2}{10} \cdot \frac{3}{11} = \frac{3}{55}$

$P_A(B)$ heißt *(bedingte) Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A*

Berechnung: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Sie sagt aus, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Ereignis B eintritt, wenn zuvor A eingetreten ist. Im Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im 2. Zug eine schwarze Kugel gezogen wird, wenn im 1. Zug bereits eine schwarze gezogen wurde.

Dabei gelten folgende Regeln:

1. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten auf Ästen, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen, ist stets 1. z.B.:
   $P(A) + P(B) = 1$ oder $P_A(B) + P_A(A) = 1$
2. Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses in einem mehrstufigen Zufallsexperiment ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad, der zu diesem Elementarereignis führt.
3. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich die Summe der Wahrscheinlichkeit der Pfade, die zu diesem Ereignis führen.

Beispiel: P(„Genau 1 weiße Kugel“) = $\frac{1}{5} + \frac{8}{55} = \frac{19}{55}$ (Markierte Pfade

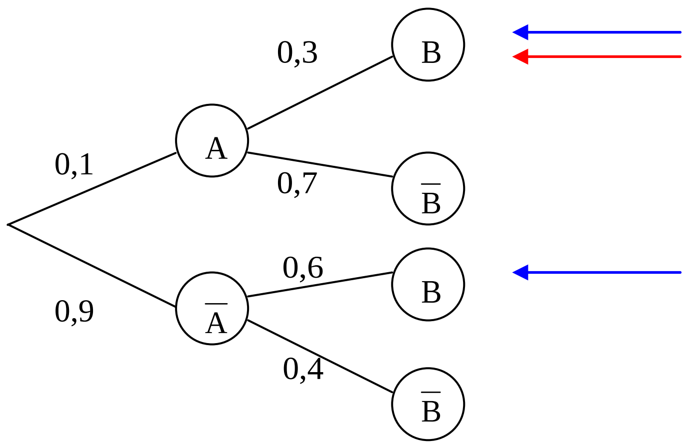
Für das Beispiel ergibt sich folgende Verteilung:

ω	(ss)	(sw)	(ws)	(ww)
P({ω})	60%	20%	$\frac{8}{55}$	$\frac{3}{55}$

2. Berechnungen mit der bedingten Wahrscheinlichkeit

Gegeben sind die Bedingung A mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit und die bedingten Wahrscheinlichkeiten von B unter der Bedingung A bzw. $\overline{A}$, gesucht ist die Wahrscheinlichkeit von B.

Beispiel:
10% der Schüler unserer Schule sind männlich. 30% der Jungen und 60% der Mädchen spielen ein Instrument. Wie viel Prozent aller Schüler spielt ein Instrument.



Lösung:

Man muss die Wahrscheinlichkeiten, die zum Ereignis B führen (blaue Pfeile), addieren.

Also: 10%·30% + 90%·60% = 0,1·0,3 + 0,9·0,6 = 0,57 = 57%

Beispiel 2:
Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass ein Instrumentspieler männlich ist?

Wir wissen: $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Also: $P_B(A) = \dfrac{10\% \cdot 30\%}{54\%} = \dfrac{0,1 \cdot 0,3}{0,54} = 5,56\%$

Man dividiert das Ergebnis des Pfads P(A $\cap$ B) (Roter Pfeil) durch P(B) (Summe von Wahrscheinlichkeiten – Beispiel 1, blaue Pfeile)